

УДК 517.9564

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н.Дж.ПАШАЕВ

Ленкоранский Государственный Университет
nrasa@rambler.ru

В работе рассматривается обратная задача о восстановлении неизвестных многомерных, зависящих от пространственных переменных, коэффициентов при младших членах уравнений системы типа реакция–диффузия. Доказаны теоремы существования, единственности и “условной” устойчивости решения. Кроме того, оценена скорость сходимости приближенных решений к точному решению поставленной задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение, обратная задача, полулинейное уравнение, система типа реакция диффузия, существование, единственность.

Примем следующие обозначения: R^n – вещественное n -мерное евклидово пространство, $B \subset R^n$ – ограниченная область с границей $\partial B \in C^{2+\alpha}$, $\Omega = B \times (0, T]$, $S(B) = \partial B \times [0, T]$, $T > 0$. Пространства $C^l(\cdot)$, $C^{l,1/2}(\cdot)$, $C^{l+\alpha}(\cdot)$, $C^{l+\alpha, (l+\alpha)/2}(\cdot)$, $l = 0, 1, 2$, $0 < \alpha < 1$, и нормы в этих пространствах определены, например, в [1, с.16],

$$u = (u_1, \dots, u_m), \|u\|_l = \sum_{k=1}^m \|u_k\|_{C^l},$$

$$u_{kt} = \frac{\partial u_k}{\partial t}, u_{kx_j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \Delta u_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2}.$$

Рассмотрим задачу об определении $\{c_k(t), u_k(x, t), k = \overline{1, m}\}$ из условий

$$u_{kt} - \Delta u_k + c_k(x)u_k = g_k(x, t, u), (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u_k(x, 0) = \varphi_k(x), \quad x \in \overline{B}; \quad u_k(x, t) = \psi_k(x, t), \quad (x, t) \in S(B), \quad (2)$$

$$\int_0^T u_k(x, t) dt = r_k(x), \quad x \in \bar{B}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (3)$$

здесь $g_k(x, t, v)$, $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x, t)$, $r_k(x)$, $k = \overline{1, m}$ – заданные функции.

Подобные задачи, как правило, некорректны в смысле Адамара и изучались в работах [3-5].

Относительно входных данных задачи (1)-(3) сделаем следующие предположения:

$$1^0. \quad g_k(x, t, v) \in C_{x,t}^{\alpha, \alpha/2}(A) \text{ и } |g_k(x, t, v_1) - g_k(x, t, v_2)| \leq \sigma_1 |v_1 - v_2|, \\ (x, t, v_1), (x, t, v_2) \in A, \text{ где } A = \bar{B} \times [0, T] \times R^m, \quad k = \overline{1, m}.$$

2⁰.

$$\varphi_k(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{B}), \quad \psi_k(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S(B)), \quad \varphi_k(x) = \psi_k(x, 0), \quad x \in \partial B, \\ k = \overline{1, m}.$$

$$3^0. [\psi_{kt}(x, 0) - \Delta \varphi_k(x) - g_k(x, 0, \varphi)] r_k(x) = \\ = \left[\psi_k(x, T) - \varphi_k(x) - \Delta r_k(x) - \int_0^T g(x, t, \psi) dt \right] \psi_k(x, 0), \quad x \in \partial B, \quad k = \overline{1, m}.$$

$$4^0. \quad r_k(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{B}), \quad r_k(x) \neq 0, \quad x \in \bar{B}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Определение. Систему $\{c_k(x), u_k(x, t), k = \overline{1, m}\}$ назовем решением задачи (1)-(3), если:

- 1) $c_k(x) \in C(\bar{B})$;
- 2) $u_k(x, t) \in C^{2,1}(\bar{B} \times [0, T])$;
- 3) удовлетворяются все условия (1)-(3).

Теорема единственности, а также оценка устойчивости решений обратных задач занимает центральное место в исследовании вопросов их корректности. Здесь, при наиболее общих предположениях, доказывается единственность решения задачи (1)-(3) и устанавливается оценка, характеризующая устойчивость решения.

Теорема 1. Пусть:

- 1) выполнены условия 1⁰, 2⁰, 4⁰;
- 2) существует решение задачи (1)-(3), принадлежащее множеству

$$K^\alpha = \left\{ (c_k, u_k, k = \overline{1, m}) \mid c_k(x) \in C^\alpha(\bar{B}), u_k(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{B} \times [0, T]) \right\}.$$

Тогда на множестве K^α решение задачи (1)-(3) единственно и верна следующая оценка устойчивости:

$$\|u - \bar{u}\|_0 + \|c - \bar{c}\|_0 \leq M \left[\|g - \bar{g}\|_0 + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_2 + \|\psi - \bar{\psi}\|_{2,1} + \|r - \bar{r}\|_1 \right], \quad (4)$$

где $M > 0$ - зависит от данных задачи (1)-(3) и множества K^α , $\{\bar{c}_k(x), \bar{u}_k(x, t), k = \overline{1, m}\}$ - решение задачи (1)-(3) из множества K^α с данными $\bar{g}_k(\cdot), \bar{\varphi}_k(\cdot), \bar{\psi}_k(\cdot), \bar{r}_k(\cdot)$, которые удовлетворяют условиям $1^0, 2^0, 4^0$, соответственно.

Для приближенного решения обратной задачи (1)-(3) применяется метод последовательных приближений: пусть $\{c_k^{(s)}(x), u_k^{(s)}(x, t), k = \overline{1, m}\}$ уже найдены и $c_k^{(s)}(x) \in C^\alpha(\bar{B}), u_k^{(s)}(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$.

Рассмотрим задачу об определении $u_k^{(s+1)}(x, t), k = \overline{1, m}$ из условий

$$u_{kt}^{(s+1)} - \Delta u_k^{(s+1)} = g_k(x, t, u^{(s)}) - c_k^{(s)}(x)u_k^{(s)}, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (5)$$

$$u_k^{(s+1)}(x, 0) = \varphi_k(x), \quad x \in \bar{B}; \quad u_k^{(s+1)}(x, t) = \psi_k(x, t), \quad (x, t) \in S(B). \quad (6)$$

Если входные данные обладают свойствами $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$, то эта задача имеет единственное классическое решение, принадлежащее $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$ [1, с.364]. Далее, по функциям $u_k^{(s+1)}(x, t)$ из формулы

$$c_k^{(s+1)}(x) = \frac{u_k^{(s+1)}(x, T) - \varphi_k(x) - \Delta r_k(x) - \int_0^T g_k(x, t, u^{(s+1)}) dt}{r_k(x)}, \quad x \in \bar{B}, \quad (7)$$

определяются $c_k^{(s+1)}(x), k = \overline{1, m}$, и функции $\{c_k^{(s+1)}(x), u_k^{(s+1)}(x, t), k = \overline{1, m}\}$ используются для проведения следующего шага итерации.

Таким образом, если выбрать $c_k^{(0)}(x) \in C^\alpha(\bar{B}), u_k^{(0)}(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega}), k = \overline{1, m}$, то из системы (5)-(7) при $s = 0, 1, 2, \dots$ последовательно найдем функции $\{c_k^{(s)}(x) \in C^\alpha(\bar{B}), u_k^{(s)}(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega}), k = \overline{1, m}\} \in K^\alpha, s = 1, 2, \dots$

Теорема 2. Пусть:

- 1) выполнены условия $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$;
- 2) задача (1)-(3) имеет единственное решение, принадлежащее множеству K^α .

Тогда система $\{c_k^{(s)}(x), u_k^{(s)}(x, t), k = \overline{1, m}\}$, определенная из (5)-(7), равномерно стремятся к решению задачи (1)-(3) со скоростью геометрической прогрессии.

Существование решения задачи (1)-(3) доказывается методом последовательных приближений, применяемого по схеме (5)-(7).

Теорема 3. Пусть:

1) функции $g_k(x, t, v)$, $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x, t)$, $r_k(x)$, $k = \overline{1, m}$ удовлетворяют условиям $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$, соответственно;

$$2) \int_0^T \psi_k(x, t) dt = r_k(x), \quad k = \overline{1, m}, \quad x \in \partial B.$$

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение в смысле определения 1.

Ниже приводим доказательство теоремы 1.

Сначала докажем справедливость оценки (4). Для того, чтобы получить теорему единственности в проведенных ниже рассуждениях возмущения входных данных везде следует предполагать тождественно равными нулю.

Из уравнений (1), с учетом (3) и условий теоремы 1, для функций $c_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, получим

$$c_k(x) = \left[u_k(x, T) - \varphi_k(x) - \Delta r_k(x) - \int_0^T g_k(x, t, u) dt \right] / r_k(x). \quad (8)$$

Определим функцию [2, 87]:

$$\rho_k(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}), \quad \rho_k(x, 0) = \varphi_k(x), \quad x \in \overline{B}, \quad \rho_k(x, t) = \psi_k(x, t), \quad (x, t) \in S(B). \quad (9)$$

$$\text{Обозначим} \quad z_k(x, t) = u_k(x, t) - \overline{u}_k(x, t), \quad \lambda_k(x) = c_k(x) - \overline{c}_k(x), \\ \delta_{1k}(x, t, u) = g_k(x, t, u) - \overline{g}_k(x, t, u), \quad \delta_{2k}(x, t) = \rho_k(x, t) - \overline{\rho}_k(x, t), \quad \delta_{3k}(x) = r_k(x) - \overline{r}_k(x).$$

Нетрудно проверить, что система $\{\lambda_k(x), v_k(x, t) = z_k(x, t) - \delta_{2k}(x, t), \quad k = \overline{1, m}\}$ удовлетворяет соотношениям:

$$v_{kt} - \Delta v_k + c_k(x) v_k = F_k(x, t) - \lambda_k(x) \overline{u}_k, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (10)$$

$$v_k(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{B}; \quad v_k(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S(B), \quad (11)$$

$$\lambda_k(x) = z_k(x, T) \setminus r_k(x) + P_k(x), \quad x \in \overline{B}, \quad (12)$$

где

$$F_k(x, t) = \Delta \delta_{2k} - \delta_{2kt}(x, t) - c_k(x) \delta_{2k}(x) + \delta_{1k}(x, t, u) + \\ + [\overline{g}_k(x, t, u) - \overline{g}_k(x, t, \overline{u})], \\ P_k(x) = \left\{ \int_0^T [\overline{g}_k(x, t, u) - g_k(x, t, u)] dt - \delta_{2k}(x, 0) - \Delta \delta_{3k}(x) \right\} \setminus r_k(x) + \\ + \left[\int_0^T \overline{g}_k(x, t, \overline{u}) dt + \overline{\varphi}_k(x) + \Delta \overline{r}_k(x) - \overline{u}_k(x, T) \right] \setminus (r_k(x) \overline{r}_k(x)).$$

Из условий теоремы 1 следует, что правая часть уравнения (10) удовлетворяет условию Гельдера. Значит, существует классическое решение задачи (10), (11) об определении $v_k(x, t)$ и оно может быть представлено в виде [1, 468]:

$$v_k(x, t) = \int_0^t \int_B G_k(x, t; \xi, \tau) [F_k(\xi, \tau) - \lambda_k(\xi) \bar{u}_k(\xi, \tau)] d\xi d\tau$$

или

$$z_k(x, t) = \delta_{2k}(x, t) - \int_0^t \int_B G_k(x, t; \xi, \tau) \lambda_k(\xi) \bar{u}_k(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ + \int_0^t \int_B G_k(x, t; \xi, \tau) F_k(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (13)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $d\xi = d\xi_1, \dots, d\xi_n$, $G_k(\cdot)$ - функция Грина задачи (10), (11), для которой верны следующие оценки [1, гл.IV]:

$$|G_k(x, t; \xi, \tau)| \leq N_1 (t - \tau)^{-n/2} \exp\left(-N_2 |x - \xi|^2 / (t - \tau)\right), \\ \int_B |D_x^l G_k(x, t; \xi, \tau)| d\xi \leq N_3 (t - \tau)^{-(l-\alpha)/2}, \quad l = 0, 1, 2, \quad k = \overline{1, m}, \quad (14)$$

где $N_1, N_2, N_3 > 0$ - зависят от данных задачи (10)-(11).

Положим

$$\chi = \|u - \bar{u}\|_0 + \|c - \bar{c}\|_0.$$

Оценим функции $z_k(x, t)$, $k = \overline{1, m}$. Из (13) следует:

$$|z_k(x, t)| \leq |\delta_{2k}(x, t)| + \int_0^t \int_B |G_k(x, t; \xi, \tau)| |\lambda_k(\xi) \bar{u}_k(\xi, \tau)| d\xi d\tau + \\ + \int_0^t \int_B |G_k(x, t; \xi, \tau)| |F_k(\xi, \tau)| d\xi d\tau. \quad (15)$$

Учитывая условия теоремы 1 и определения (9), для первой слагаемой в правой части (15) имеем:

$$|\delta_{2k}(x, t)| = |\rho_k(x, t) - \bar{\rho}_k(x, t)| \leq \|\rho - \bar{\rho}\|_0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (16)$$

Для $\int_0^t \int_B |G_k(x, t; \xi, \tau)| d\xi d\tau$, фигурирующих во втором и третьем слагаемых правой части (15), верна оценка (14). Поэтому

$$\int_0^t d\tau \int_B |G_k(x, t; \xi, \tau)| d\xi \leq N_3 \int_0^t (t - \tau)^{\alpha/2} d\tau = \frac{2N_3}{2 + \alpha} t^{(2+\alpha)/2}. \quad (17)$$

Подынтегральная функция $|\lambda_k(x) \bar{u}_k(x, t)|$ во втором слагаемом правой части (15), в силу требований, наложенных на входные данные и на множество K^α , удовлетворяет оценке

$$|\lambda_k(x) \bar{u}_k(x, t)| \leq M_1 \|c - \bar{c}\|_0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (18)$$

где $M_1 > 0$ зависит от данных задачи (1)-(3) и множества K^α .

Для подынтегральной функции $|F_k(x, t)|$ в третьем слагаемом правой части (15), в силу условий теоремы 1, получим

$$|F_k(x, t)| \leq M_2 \left[\|\rho - \bar{\rho}\|_{2,1} + \|g - \bar{g}\|_0 + \|u - \bar{u}\|_0 \right], \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (19)$$

здесь $M_2 > 0$ зависит лишь от данных задачи (1)-(3) и множества K^α .

Учитывая оценки (16), (17), (18) и (19), из (15) получим

$$|z_k(x, t)| \leq M_3 \left[\|\rho - \bar{\rho}\|_{2,1} + \|g - \bar{g}\|_0 \right] + M_4 \chi t^{(2+\alpha)/2}, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (20)$$

где $M_2, M_3 > 0$ зависят лишь от данных задачи (1)-(3) и множества K^α .

Теперь оценим функцию $|\lambda_k(x)|$. Из (12) следует, что

$$|\lambda_k(x)| \leq |z_k(x, T)| + |r_k(x)| + |P_k(x)|.$$

Учитывая условия теоремы 1, определение множества K^α , неравенство (20) и выражение для $P_k(x)$, из последнего неравенства получим:

$$|\lambda_k(x)| \leq M_6 \left[\|\rho - \bar{\rho}\|_{2,1} + \|g - \bar{g}\|_0 + \|r - \bar{r}\|_1 \right] + M_7 \chi t^{(1+\alpha)/2}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (21)$$

где $M_6, M_7 > 0$ зависят от данных задачи (1)-(3) и множества K^α .

Неравенства (20) и (21) удовлетворяются при любых значениях $(x, t) \in \bar{\Omega} = \bar{B} \times [0, T]$. Поэтому они должны удовлетворяться также для максимальных значений левых частей. Следовательно, объединяя эти неравенства, получим

$$\chi \leq M_8 \left[\|\rho - \bar{\rho}\|_{2,1} + \|g - \bar{g}\|_0 + \|r - \bar{r}\|_1 \right] + M_9 \chi t^{(1+\alpha)/2}. \quad (22)$$

Пусть T_1 ($0 < T_1 \leq T$) такое число, что $M_{10} T_1^{(1+\alpha)/2} < 1$. Тогда из (22) получим, что при $(x, t) \in \bar{B} \times [0, T_1]$ верна оценка устойчивости (4) для решения задачи (1)-(3).

Последовательно рассматривая задачу (1)-(3) в интервалах $(T_1, 2T_1)$, $(2T_1, 3T_1)$ и т.д. получим, что оценка устойчивости (4) верна при $(x, t) \in \bar{B} \times [0, T]$ для любого конечного T .

Единственность решения задачи (1)-(3) следует из оценки (4) при $g(x, t, u) = \bar{g}(x, t, u)$, $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x)$, $\psi(x, t) = \bar{\psi}(x, t)$, $r(x) = \bar{r}(x)$.

Теорема 1 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладъженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.И. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.:Наука, 1967, 736 с.
2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968, 427 с.
3. Искендеров А.Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений //ДАН СССР, 1975, т.225, №5, с.1005-1008.
4. Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для линейного параболического уравнения в ограниченной области //ИПММ НАН Украины “Нелинейные граничные задачи”, Донецк, 2004, в.14, с.138-145.
5. Akhundov A.Y. Some inverse problems for strong parabolic systems //Ukraine math. Journal, 2006, v.58, №1, p.114-123.

YARIMXƏTTİ PARABOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN BİR TƏRS MƏSƏLƏ HAQQINDA

N.C.PAŞAYEV

XÜLASƏ

Məqalədə reaksiya-diffuziya tipli sistemin tənliklərində kiçik hədlər qarşısında olan, fəza dəyişənlərindən asılı naməlum əmsalların tapılması haqqında tərs məsələyə baxılıb. Həllin varlığı, yeganəliyi və “şərti” dayanıqlığı haqqında teoremlər isbat olunub.

Açar sözlər: parabolik tənlik, tərs məsələ, yarım xətti tənlik, reaksiya – diffuziya tipli sistem, varlıq, yeganəlik.

ON AN INVERSE PROBLEM FOR A SYSTEM OF SEMI-LINEAR PARABOLIC EQUATIONS

N.J. PASHAYEV

SUMMARY

In the paper, an inverse problem on finding unknown coefficients dependent on spatial variables standing before minor terms in the equations of the system of reaction-diffusion type is considered. Theorems on the existence and uniqueness and “conventional” stability of the solution are proved.

Key words: parabolic equation, inverse problem, semi-linear equation, a system of reaction-diffusion type, existence, uniqueness.

Поступила в редакцию 06.09.2010 г.

Принято к печати 10.03.2011 г.